Lösungen zu den Beispielaufgaben zum Zertifikat
Null Problemo – Mathematisches Problemlösen
2023

Lösung zu Aufgabe 1.

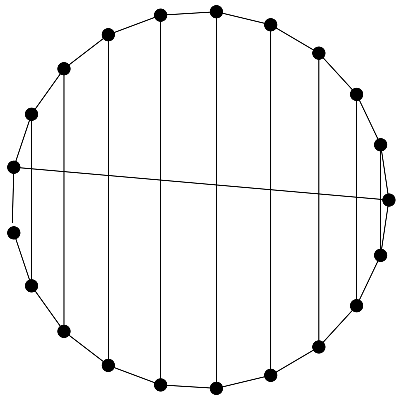
Wir stellen die Personen als Punkte und die Bekanntschaften als Kanten zwischen diesen Punkten (Ecken) dar. Das ergibt einen Graphen.

1. Nein. Angenommen, dies wäre möglich, dann hätte in diesem Graphen jede der 21 Ecken den Grad drei. Nach der Kanten-Ecken-Formel, welche für jeden Graphen gilt, müsste dann gelten:

$$2k = \sum_E d_E = 11 \cdot 3 = 33,$$

   wobei k die Anzahl der Kanten und d_E der Grad der Ecke E ist und die Summe über alle Ecken E des Graphen läuft. Dies ist ein Widerspruch, da $2k$ gerade, aber 33 ungerade ist.

2. Ja. Als Graph könnte man das zum Beispiel so darstellen:



Lösung zu Aufgabe 2.

1. **Erste Lösung:** Am einfachsten geht es, wenn man Kongruenzen verwendet: Es ist $3 \equiv -4 \pmod 7$. Mit der Potenzregel folgt $3^{105} \equiv (-4)^{105} \pmod 7$. Also folgt:

$$3^{105} + 4^{105} \equiv (-4)^{105} + 4^{105} = (-1)^{105} \cdot 4^{105} + 4^{105} = -4^{105} + 4^{105} = 0 \pmod 7.$$

   Das bedeutet, dass $3^{105} + 4^{105}$ durch 7 teilbar ist.

   Zweite Lösung: Wir schreiben die Reste hin, die die Potenzen von 3 und 4 bei Teilen durch 7 lassen (man muss die höheren Potenzen dafür nicht ausrechnen, z.B.: $3^2 = 9 = 7 + 2$ lässt den Rest 2, also lässt $3^3 = 3 \cdot 3^2$ den Rest $3 \cdot 2 = 6$ usw.):

k	Rest von 3^k	Rest von 4^k
0	1	1
1	3	4
2	2	2
3	6	1
4	4	4
5	5	2
6	1	1
7	3	4

Da bei $k = 6$ die Reste gleich 1 sind (so wie bei $k = 0$), ergeben sich bei $k = 7$ dieselben Reste wie bei $k = 1$, bei $k = 8$ wie bei $k = 2$ usw. Das heißt, die Folge wiederholt sich immer wieder mit der Periode 6, und die Reste sind auch bei $k = 12$, $k = 18$ usw. gleich 1, also auch bei $k = 102$, da dies durch 6 teilbar ist. Daher ist der Rest von 3^{105} gleich 6 (drei weiter in der Tabelle) und der von 4^{105} ist 1. Wegen $6 + 1 = 7$ ist also $3^{105} + 4^{105}$ durch 7 teilbar.

2. **Erste Lösung:** Wegen $4^2 = 16 \equiv 1 \pmod{15}$ folgt

$$4^{100} = (4^2)^{50} \equiv 1^{50} = 1 \pmod{15}$$

also lässt 4^{100} den Rest 1.

Zweite Lösung: Wie bei (a) schreiben wir eine Tabelle der Reste beim Teilen durch 15 hin:

k	Rest von 4^k
0	1
1	4
2	1

Dies wiederholt sich schon nach zwei Schritten, also sind die Reste von 4^k für $k = 2, 4, 6, 8, \ldots$ gleich 1, also auch der von 4^{100}.

Lösung zu Aufgabe 3.

Wir wollen mit Teilbarkeit durch 5 argumentieren. Daher machen wir zunächst eine Tabelle der Reste, die Quadratzahlen und vierte Potenzen bei Teilen durch 5 lassen:

a	$a^2 \pmod 5$	$a^4 \pmod 5$
0	0	0
1	1	1
2	4	1
3	4	1
4	1	1

Für die folgenden Zahlen wiederholt sich dieses Muster. Denn ist zum Beispiel a kongruent zu 3 modulo 5, so ist a^2 kongruent zu 3^2 (also zu 4) und a^4 kongruent zu 3^4 (also zu 1) modulo 5.

1. Angenommen, es gäbe $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $a^4 + b^4 = 5c^4$. Wähle unter allen Lösungen diejenige mit kleinstem c.
   Dann wäre $a^4 + b^4 \equiv 0 \pmod 5$. Aus obiger Tabelle wissen wir dann $a^4 \equiv b^4 \equiv 0 \pmod 5$ (ansonsten wäre $a^4 + b^4 \equiv 1 \pmod 5$ oder $a^4 + b^4 \equiv 2 \pmod 5$).
   Also gilt auch (wieder nach obiger Tabelle) $a \equiv b \equiv 0 \pmod 5$. Es gibt somit $A, B \in \mathbb{N}$ mit $a = 5A$ und $b = 5B$. Damit ist
   $$5c^4 = a^4 + b^4 = (5A)^4 + (5B)^4 = 5^4 \cdot (A^4 + B^4).$$
   Also $c^4 = 5^3(A^4 + B^4)$ und damit $c^4 \equiv 0 \pmod 5$ und nach Tabelle $c \equiv 0 \pmod 5$. Sei nun $C \in \mathbb{N}$ mit $c = 5C$. Dann gilt
   $$5^4 \cdot C^4 = (5C)^4 = c^4 = 5^3(A^4 + B^4) \;\Rightarrow\; 5C^4 = A^4 + B^4.$$
   Damit ist A, B, C eine weitere Lösung der Gleichung, wobei $C = \frac{c}{5} < c$. Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von c. Unsere Annahme zu Beginn muss somit falsch gewesen sein und die Gleichung besitzt keine Lösung mit natürlichen Zahlen.
   Anmerkung: Wir haben zu Beginn die Lösung mit dem kleinsten c betrachtet und konnten dann eine weitere Lösung konstruieren, bei welcher der entsprechende Wert noch kleiner ist.
   Stattdessen hätten wir auch wie folgt argumentieren können: Wir nehmen an, die Gleichung hätte eine Lösung a, b, c aus den natürlichen Zahlen. Dann wären nach obiger Begründung a, b, c durch 5 teilbar und $A = \frac{a}{5}$, $B = \frac{b}{5}$ und $C = \frac{c}{5}$ wären ebenfalls eine Lösung der ursprünglichen Gleichung. Nach dem gleichen Argument wären auch A, B, C durch 5 teilbar usw. So würden wir eine Folge mit immer kleineren Lösungen erhalten. Da alle Lösungen aus den natürlichen Zahlen sind, wäre dies nicht möglich.

2. Die Gleichung ist lösbar, z.B. durch $a = 1, b = 2$ und $c = 1$.